LIBRIS | We know books

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică
algebră
geometrie

clasa a VI-a

partea I

ediția a XI-a



mate 2000 – consolidare

Cuprins

LIBRIS | We know books

RECAPITULAREA MATERIEI DE CLASA A V-A
1. Exerciţii şi probleme recapitulative 5
2. Teste de evaluare 7

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULŢIMI. MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1. Mulţimi 12
1.1.1. Descriere, notaţii, reprezentări. Mulţimi numerice şi mulţimi nenumerice. Relaţia dintre un element şi o mulţime 12
1.1.2. Relaţii între mulţimi 15
1.1.3. Mulţimi finite, cardinalul unei mulţimi finite. Mulţimi infinite. Mulţimea numerelor naturale 17
1.1.4. Operaţii cu mulţimi: reuniune, intersecţie, diferenţă 19
1.1.5. Recapitulare şi sistematizare prin teste 24
Test de autoevaluare 27

1.2. Divizibilitatea numerelor naturale 29
1.2.1. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime 29
1.2.2. Aplicaţie: determinarea celui mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.), numere prime între ele 34
1.2.3. Aplicaţie: determinarea celui mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) 37
1.2.4. Proprietăţi ale divizibilităţii în $\mathbb{N}$ 39
1.2.5. Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea 43
1.2.6. Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană 45
1.2.7. Recapitulare şi sistematizare prin teste 46
Test de autoevaluare 51
Test de autoevaluare 53

Capitolul II. RAPOARTE ŞI PROPORŢII

2.1. Rapoarte 55
2.1.1. Raport 55
2.1.2. Titlul unui aliaj 55
2.1.3. Concentraţia unei soluţii 56
2.1.4. Scara unui desen 56

2.2. Procente 59
2.2.1. Procent 59
2.2.2. Aflarea a $p\%$ dintr-un număr 60
2.2.3. Aflarea unui număr când cunoaştem $p\%$ din el 60
2.2.4. Calculul raportului procentual 60
2.2.5. Creşteri şi scăderi cu $p\%$ 60
2.2.6. Procente din procente 61

2.3. Proporţii 64
2.3.1. Proporţie 64
2.3.2. Proprietatea fundamentală a proporţiei 64
2.3.3. Aflarea unui termen necunoscut al unei proporţii 64
2.3.4. Proporţii derivate 65
2.3.5. Şir de rapoarte egale 65
2.3.6. Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană 68
2.3.7. Recapitulare şi sistematizare prin teste 71
Test de autoevaluare 73

LIBRIS We know books

2.4. Mărimi proporţionale ... 75
2.4.1. Mărimi direct proporţionale ... 75
2.4.2. Mărimi invers proporţionale ... 76
2.4.3. Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană ... 81
2.4.4. Recapitulare şi sistematizare prin teste ... 82
2.5. Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporţionalităţii ... 84
2.6. Probabilităţi (Aplicaţie la rapoarte) ... 87
2.6.1. Recapitulare şi sistematizare prin teste ... 91
Test de autoevaluare ... 95

GEOMETRIE

RECAPITULAREA MATERIEI DE CLASA A V-A ŞI COMPLETĂRI

1. Elemente de geometrie ... 97
2. Exerciţii şi probleme recapitulative ... 100
3. Teste de evaluare ... 102
Test de autoevaluare ... 105

Capitolul I. NOŢIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

1.1. Unghiuri ... 107
1.1.1. Unghiuri opuse la vârf, congruenţa lor ... 107
1.1.2. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor lor ... 110
1.1.3. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare ... 112
1.1.4. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcţia bisectoarei unui unghi ... 115
1.1.5. Recapitulare şi sistematizare prin teste ... 119
Test de autoevaluare ... 121
1.2. Paralelism ... 123
1.2.1. Drepte paralele: definiţie, notaţie, construcţie intuitivă prin translaţie. Axioma paralelelor ... 123
1.2.2. Criterii de paralelism. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă ... 125
1.2.3. Aplicaţii practice în poligoane şi corpuri geometrice ... 129
1.2.4. Recapitulare şi sistematizare prin teste ... 132
Test de autoevaluare ... 135
1.3. Perpendicularitate ... 137
1.3.1. Drepte perpendiculare în plan (definiţie, notaţie, construcţie). Oblice ... 137
1.3.2. Aplicaţii practice în poligoane şi corpuri geometrice ... 139
1.3.3. Distanţa de la un punct la o dreaptă ... 141
1.3.4. Mediatoarea unui segment. Construcţia mediatoarei unui segment. Simetria faţă de o dreaptă ... 143
1.3.5. Recapitulare şi sistematizare prin teste ... 148
Test de autoevaluare ... 151
1.4. Cercul ... 153
1.4.1. Cerc. Elemente în cerc: centru, coardă, diametru, arc de cerc ... 153
1.4.2. Unghi la centru. Măsuri ... 156
1.4.3. Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un cerc. Poziţiile relative a două cercuri ... 158
1.4.4. Recapitulare şi sistematizare prin teste ... 161
Test de autoevaluare ... 163

Teste recapitulative ... 165
Indicaţii şi răspunsuri ... 172

LIBRIS We know books

Capitolul I
Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

PP Competențe specifice

- 1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$
- 2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9 în $\mathbb{N}$
- 3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.
- 4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
- 5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în $\mathbb{N}$
- 6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în $\mathbb{N}$

PE-PP 1.1. Mulțimi

1.1.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime

Mulțimea este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite **elementele mulțimii**.

Mulțimile se notează cu litere mari, iar **elementele mulțimii** se notează cu litere mici.

Dacă A este o mulțime și x, un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi x aparține lui A. Dacă x nu este un element al mulțimii A, atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi x nu aparține lui A.

O mulțime poate fi dată în trei moduri:

1. **numind fiecare element al mulțimii**; în acest caz mulțimea se scrie punând între acolade elementele sale;

Exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

2. **cu ajutorul diagramei Venn–Euler**; în acest caz, mulțimea poate fi ilustrată desenând o curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (fig. 1);

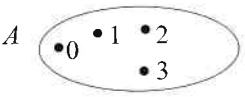


Fig. 1

LIBRIS We know books

- **enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii** (pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu aparține mulțimii).

Exemplu: $A = \{x \mid x \text{ este număr natural și } x < 4\}$.

- Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă**; ea se notează cu simbolul $\emptyset$.
- Mulțimea care are ca elemente toate numerele naturale este numită **mulțimea numerelor naturale**. Aceasta se notează cu $\mathbb{N}$. Așadar:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

- Numărul de elemente al unei mulțimi A se numește **cardinalul** mulțimii A și se notează card A.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul:
a) *bibliotecă*; b) *cinematecă*; c) *actualități*.

2. Scrieți mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:
a) 43 257; b) 524 123; c) 17 230 415; d) 425 730.

3. Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 4.

4. Scrieți mulțimea numerelor naturale cuprinse între 6 și 14.

5. Scrieți mulțimea cifrelor: a) pare; b) impare.

6. Fie mulțimile: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{c, d, e\}$; $C = \{a, c, e\}$. Căror mulțimi le aparține:
a) elementul a; b) elementul b?

7. Fie mulțimile: $A = \{1, 3, 4, 7\}$ și $B = \{2, 4, 7, 9\}$. Scrieți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $2 \in A$; b) $3 \notin A$; c) $2 \notin B$;
d) $1^{2003} \in A$; e) $4 \in A$ și $4 \in B$; f) $1 \in A$ sau $7 \in B$.

8. Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.

9. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $3 \in \{0, 1, 3\}$; b) $2 \notin \{1, 4, 5\}$;
c) $4 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$; d) $0 \in \emptyset$;
e) $2^{21} \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3^{14}\}$; f) $10 \in \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 12\}$.

PE Aplicare și exersare **

10. Fie $A = \{0, 1, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 2^a + a \text{ și } a \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii B și calculați card B.

11. Indicați propozițiile false:
a) $2 \in \{1, 7, 3\}$; b) $7^0 \in \{1, 3, 9\}$; c) $4 \notin \{1, 2, 3\}$;
d) $7 \notin \{0, 3, 7, 11\}$; e) $0 \in \emptyset$; f) $0 \notin \emptyset$.

12. Scrieți următoarele mulțimi enumerând elementele acestora:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$;
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 10\}$.

13. Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2^k, k \in \mathbb{N}, k < 4\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x \leq 32\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x^3 \leq 64\}$.

LIBRIS We know books

14. Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^x = 1 \text{ sau } 3^x = 27\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 12 \text{ și } x^2 \geq 9\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

15. Aflați cardinalul mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2\,001\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 1\,957\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 10\}$;

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$; $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 14\}$; $F = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 2\,002\}$.

16. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + 3 < 7\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^3 - 5 > x \text{ și } x \leq 3^3 - 2\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect de două cifre}\}$; $D = \{\overline{2x} \mid x \text{ este cifră impară}\}$;

$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect și } x \text{ are ultima cifră } 3\}$; $F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2^{x+1} = 32\}$.

17. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 \leq 5\}$; b) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x - 2^0 = 63\} = \{6\}$;

c) $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ este cifră pară}\}$.

PE Aprofundare și performanță ***

18. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x + 8^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 24^x + 24^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$.

19. Scrieți elementele mulțimilor de mai jos. Ce observați?

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 11\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x - 2 \leq 9\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq 2x - 1 \leq 21\}$.

20. Determinați mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{2ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{1ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{49}) : (1 + 2^{52}) \geq x\}$.

PE-PP Supermate ****

21. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan proprietățile:

a) $\{1, 2, 3, 4\}$ reprezintă mulțimea formată din toate elementele mulțimilor A și B;

b) fiecare mulțime are câte două elemente; c) dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

22. Se dă mulțimea A formată din numere naturale, cu proprietățile:

a) $9 \in A$; b) dacă $x \in A$, atunci $5x + 1 \in A$; c) dacă $7x + 4 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătați că $6 \in A$.

LIBRIS know books

PE-PP 1.1.2. Relații între mulțimi

- Două mulțimi sunt **egale** dacă au aceleași elemente. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, notăm $A = B$, iar dacă nu sunt egale notăm $A \neq B$.
- Fie A și B două mulțimi; A este inclusă în B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B. Se scrie $A \subset B$. Se mai spune că B **include** pe A și se scrie $B \supset A$. În acest caz se spune despre A că este o **submulțime** a lui B. Dacă A nu este inclusă în B, adică A nu este o submulțime a lui B, notăm $A \not\subset B$ (citim „A nu este inclus în B") sau $B \not\supset A$ (citim „B nu include pe A").
- Se consideră că mulțimea $\varnothing$ este **submulțime** a oricărei mulțimi A.
- Orice mulțime este **inclusă** în ea însăși. Deci $A \subset A$, oricare ar fi mulțimea A.
- Două mulțimi sunt **egale** dacă fiecare dintre ele este o submulțime a celeilalte mulțimi: $A = B$ dacă și numai dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Scrieți toate submulțimile mulțimilor:
   a) $\{1, 2\}$; b) $\{2, 3, 5\}$; c) $\{a, b, c\}$.
2. Scrieți trei submulțimi ale mulțimii numerelor naturale.
3. Scrieți toate mulțimile X care îndeplinesc condițiile: $\{1, 3\} \subset X$ și $X \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
4. Dați trei exemple de mulțimi egale cu mulțimea vidă.
5. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x \leq 10\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 < 7\}$.
   a) Scrieți elementele celor două mulțimi.
   b) Stabiliți dacă $A \subset B$ sau $B \subset A$.
6. Care dintre mulțimile de mai jos sunt egale?
   $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 8\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 7\}$;
   $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3, x \text{ cifră}\}$; $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5, x \text{ număr par}\}$.
7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
   a) $\{1, 2, 5\} \subset \{0, 1, 2, 5, 7\}$; b) $\{1, 2, 5\} \supset \{0, 1, 2, 5, 7\}$;
   c) $\{3, 7, 11\} \supset \{3\}$; d) $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 2\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$;
   e) $\varnothing \subset \{0\}$; f) $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este cifră a numărului } 34\,021\}$.

PE Aplicare și exersare **

8. Fie $M = \{11, 21, 31, \ldots, 91\}$.
   a) Scrieți cardinalul mulțimii M.
   b) Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M formate din câte patru elemente.
   c) Scrieți toate submulțimile mulțimii M formate din câte opt elemente.
9. Fie $M = \{0, 1, 7\}$.
   a) Scrieți toate submulțimile mulțimii M.
   b) Scrieți mulțimea X formată din submulțimile mulțimii M.
   c) Scrieți cardinalul mulțimii X.

10. Fie $M = \{x \mid x$ este cifră pară$\}$.

a) Scrieți elementele mulțimii M.

b) Scrieți trei submulțimi care sunt incluse în M.

c) Scrieți trei mulțimi care includ mulțimea M.

11. Determinați toate valorile lui x pentru care următoarele afirmații să fie adevărate:

a) $\{x\} \subseteq \{2, 4\}$; b) $\{2, 3, x\} \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$; c) $\{1, x, 4\} \subseteq \{1, 4, 6, 7\}$.

12. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B, atunci $A \ldots B$.

b) Dacă există în mulțimea A cel puțin un element care nu este element al mulțimii B, atunci $A \ldots B$.

c) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B și orice element al mulțimii B este element al mulțimii A, atunci $A \ldots B$.

13. Fie mulțimile: $A = \{2x - 1;\ x;\ 3x + 1\}$ și $B = \{2(x + 1) - 3;\ 2x - 7;\ 2x + 8\}$. Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $A = B$.

14. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 3\}$; $C = \{2\}$; $D = \{2, 3, 4\}$; $E = \{3, 2\}$. Completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile: „$\subset$”, „$\supset$”, „$\not\subset$”, „$\not\supset$”, „$=$” sau „$\neq$”.

a) $A \ldots B$; b) $C \ldots A$; c) $B \ldots D$; d) $B \ldots E$; e) $C \ldots D$; f) $E \ldots A$.

15. Fie $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*$ și $x \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $2 \leq x < 5\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Care dintre următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false?

a) $3 \in A$; b) $1 \notin B$; c) $\{0, 1\} \subset A$; d) $\{2, 3, 4\} \subseteq B$;

e) $\varnothing \subset C$; f) $C \supset A$; g) $B \not\subset C$; h) $\{1, 5\} \not\subset C$.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $4 \leq x \leq 7\}$; $B = \{y \mid y = x + 2, x \in A\}$ și $C = \{z \mid z = 2x, x \in A\}$.

a) Precizați care dintre propozițiile următoare sunt false și care sunt adevărate:

1) $\{5, 6\} \subset A$; 2) $A \subset C$; 3) $\{7, 8\} \subseteq B$.

b) Calculați card A, card B, card C.

17. Precizați cardinalul mulțimilor: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x^2 < 70\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^3 \leq 125\}$.

18. Fie mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3x + a < 14, a \in \mathbb{N}\}$. Determinați a, număr natural, astfel încât:

a) card $M = 0$; b) card $M = 1$; c) card $M = 2$; d) card $M = 3$.

19. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 3 < 9\}$; $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y + 2 < 8\}$ și $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z = 3^n$, $n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$. Precizați care dintre propozițiile următoare sunt adevărate și care sunt false:

$$A = B,\ A \subset C,\ C \subset B,\ A = C,\ A \not\supset B,\ B \neq C.$$

PE-PP Supermate ****

20. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2\,014\}$. Determinați numărul submulțimilor formate din două elemente cu suma egală cu 2 015.

21. Fie $M = \{1, 4, 7, 10, \ldots., 97, 100\}$ și P o submulțime a sa formată din 19 elemente. Arătați că în P există două elemente distincte a căror sumă este divizibilă cu 52.

PE-PP 1.1.3. Mulţimi finite, cardinalul unei mulţimi finite. Mulţimi infinite. Mulţimea numerelor naturale

O mulţime care are n elemente, unde n este un număr natural, este o **mulţime finită.** Numărul de elemente ale unei mulţimi finite A se numeşte **cardinalul** mulţimii şi se notează **card** A.

O mulţime care nu este finită se numeşte **mulţime infinită.**

Mulţimea ale cărei elemente sunt toate numerele şirului numerelor naturale este **mulţimea numerelor naturale.**

După cum ştim deja, aceasta se notează cu $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

$\mathbb{N}^*$ este mulţimea numerelor naturale nenule: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Mulţimile $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}^*$ sunt mulţimi infinite şi $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

Fie a un număr natural. Notăm cu D_a mulţimea divizorilor lui a:

$$D_a = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ şi } n \mid a\}.$$

Evident, D_a nu este mulţimea vidă ($D_a \neq \varnothing$), deoarece D_a are cel puţin un element ($a \in D_a$, căci $a \in \mathbb{N}$ şi $a \mid a$). Se observă că $D_a \subset \mathbb{N}$ (pentru $a \neq 0$), $D_0 = \mathbb{N}$ şi $D_1 = \{1\}$.

Notăm cu M_a mulţimea multiplilor lui a:

$$M_a = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ şi } m \text{ este multiplul lui } a\}.$$

Evident, M_a nu este mulţimea vidă ($M_a \neq \varnothing$), deoarece M_a are ca elemente pe a, $2a$, $3a$, … . Deci, $M_a = \{0, a, 2a, 3a, 4a, \ldots\}$. Se observă că $M_a \subset \mathbb{N}$ (pentru $a \neq 1$), $M_0 = \{0\}$ şi $M_1 = \mathbb{N}$.

Oricare ar fi a număr natural nenul, **mulţimea divizorilor lui a este o mulţime finită**, iar **mulţimea multiplilor lui a este o mulţime infinită**.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Scrieţi mulţimile: D_2, D_{14}, D_{44}, D_7, D_{28}, D_{18}, D_{39}, D_{45}.
2. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
   a) $D_4 \subset D_{20}$; b) $D_7 \subset D_{28}$; c) $D_3 \subset D_{13}$.

PE Aplicare şi exersare **

3. Determinaţi mulţimile:
   $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } x \in D_{15}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ şi } x + 1 \in D_{18}\}$;
   $C = \{x \in D_{10} \text{ şi } x + 2 \in D_{12}\}$; $D = \{x \in M_{10} \text{ şi } x - 4 \in D_{26}\}$.
4. Determinaţi mulţimile:
   $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 18 \text{ şi } 2x + 3 \leq 15\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 14 \text{ şi } 2x - 1 < 19\}$.
5. Determinaţi mulţimile:
   $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 3 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 41 \mid (2x - 1)\}$;
   $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 5 \mid (3x - 1)\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } 4 \mid (x + 2)\}$.

6. Scrieți elementele următoarelor mulțimi:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+2) \mid 50 \text{ și } 3 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (2x+3) \mid 18\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq 2x < 10 \text{ și } (2x+1) \mid 7\}$.

7. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+1) \mid (x+7)\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \mid (x+6)\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x-1) \mid x\}$.

a) Scrieți mulțimile A, B, C, enumerând elementele acestora.

b) Precizați cardinalul fiecărei mulțimi.

8. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x-5) \mid (3x+18)\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (2x+1) \mid\mid (4x+19)\}$; $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+2) \mid (5x+27)\}$.

9. Determinați mulțimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (2x-1) \mid 121\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (3x+1) \mid 125\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+1) \mid (x+50)\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (2x+1) \mid 65 \text{ și } 17 \nmid (x+2)\}$.

PE Aprofundare și performanță ***

10. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 45 \text{ și } 3 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 8 \text{ sau } x \mid 6\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+3) \mid 36 \text{ și } 4 \mid x^2\}$.

a) Scrieți mulțimile enumerând elementele acestora.

b) Precizați cardinalul fiecărei mulțimi.

11. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (2x+1) \mid (3x+5)\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+1) \mid (x^2+2)\}$; $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+2) \mid (x^2+4x+15)\}$.

12. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x-1) \mid 11\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+1) \mid 16\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, (x+2) \mid 20, 3 \mid x\}$.

13. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 7 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 42 \mid (2x-1)\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 5 \mid (3x+1)\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 4 \mid (x+5)\}$.

14. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \mid \overline{3x8}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 6 \mid \overline{x56}\}$.

PE-PP Supermate ****

15. Fie mulțimile $A = \{x \mid x = 1\,995n + 7, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 1\,985p + 3, p \in \mathbb{N}\}$

Stabiliți dacă mulțimea $A \cap B$ are un număr finit de elemente sau o infinitate de elemente.

16. Arătați că oricare mulțime de 5 numere naturale are o submulțime de 3 elemente astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 3.

LIBRIS We know books

PE-PP 1.1.4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență

REUNIUNEA MULȚIMILOR

Reuniunea a două mulțimi A și B este mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre ele.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Ilustrăm reuniunea mulțimilor A și B cu ajutorul unei diagrame Venn–Euler, reuniunea fiind reprezentată în figura 1 prin porțiunea haşurată.

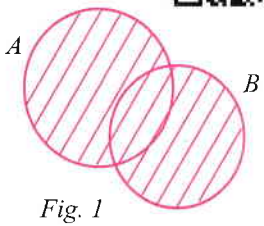


Fig. 1

INTERSECȚIA MULȚIMILOR

Intersecția a două mulțimi A și B este mulțimea elementelor comune celor două mulțimi.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Cu ajutorul unei diagrame Venn–Euler, intersecția a două mulțimi este ilustrată în figura 2 prin porțiunea haşurată.

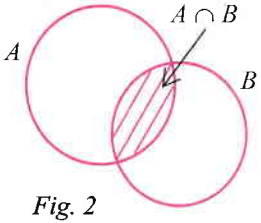


Fig. 2

Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci mulțimile A și B sunt **mulțimi disjuncte**.

DIFERENȚA A DOUĂ MULȚIMI

Fie A și B două mulțimi. Mulțimea formată din elementele lui A care nu sunt elemente ale lui B se numește diferența dintre mulțimea A și mulțimea B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

În figura 3, porțiunea haşurată ilustrează diferența $A - B$.

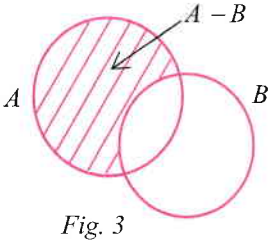


Fig. 3

PRINCIPIUL INCLUDERII ȘI EXCLUDERII (FACULTATIV)

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B).$$

Exemple:

Problema 1. Aflați câte numere naturale nenule mai mici decât 1 001 nu se divid nici cu 2, nici cu 5.

Rezolvare: Fie A mulțimea numerelor naturale mai mici decât 1 001 care sunt divizibile cu 2. Avem $1\,000 : 2 = 500$. Deci, $\text{card}\,(A) = 500$.

Fie B mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1 001 care sunt divizibile cu 5. Avem $1\,000 : 5 = 200$. Deci, $\text{card}\,(B) = 200$.

$A \cap B$ este mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1 001 care sunt divizibile și cu 2, și cu 5, deci, cu 10. Avem $1\,000 : 10 = 100$.

Deci, $\text{card}\,(A \cap B) = 100$.

$A \cup B$ este mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1 001 divizibile sau cu 2, sau cu 5.

Avem: $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B)$.

$\text{card}\,(A \cup B) = 500 + 200 - 100 = 600$.

Deci, 1 000 – 600 = 400 numere naturale nenule mai mici decât 1 001 nu sunt divizibile nici cu doi și nici cu cinci.

LIBRIS | We know books

Problema 2. Fie A și B două mulțimi astfel încât: $A \cap B = A \cup B$. Arătați că $A = B$.

Rezolvare: Avem $A - (A \cap B) = A - (A \cup B) = \varnothing \Rightarrow A - (A \cap B) = \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow A \subset A \cap B \Rightarrow A \subset B$ (1).
Avem $B - (A \cap B) = B - (A \cup B) = \varnothing \Rightarrow B - (A \cap B) = \varnothing \Rightarrow B \subset A \cap B \Rightarrow B \subset A$ (2).
Din (1) și (2) $\Rightarrow A = B$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Fie mulțimile A, B și C reprezentate cu ajutorul diagramelor (fig. 1).

a) Enumerați elementele mulțimilor A, B și C.

b) Enumerați elementele mulțimilor:

$M_1 = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$; $M_2 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;
$M_3 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$; $M_4 = \{x \mid x \in B \text{ sau } x \in C\}$;
$M_5 = \{x \mid x \in B \text{ și } x \in C\}$;
$M_6 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } x \in C\}$;
$M_7 = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B \text{ sau } x \in C\}$.

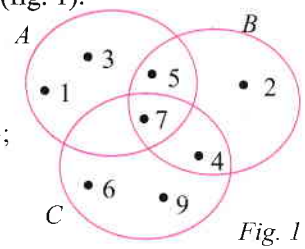


Fig. 1

2. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 5, 6\}$ și $B = \{2, 3, 7\}$. Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

3. Scrieți două mulțimi disjuncte a căror reuniune să fie mulțimea $\{1, 2, 3\}$. Determinați toate soluțiile.

4. Dacă $M \cup \{2\} = \{1, 2, 3\}$, enumerați elementele mulțimii M.

5. Fie $C = \{1, 3\}$. Scrieți:

a) două mulțimi având intersecția C; b) trei mulțimi având intersecția C.

6. Fie $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ și $C = \{3, 5, 7\}$.

a) Determinați $B \cap C$ și $A \cup (B \cap C)$.

b) Determinați $A \cup B$, $A \cup C$ și $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Comparați rezultatele. Ce observați?

7. Fie $A = \{0, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ și $C = \{1, 2, 5\}$.

a) Determinați $B \cup C$ și $A \cap (B \cup C)$.

b) Determinați $A \cap B$, $A \cap C$ și $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) Comparați rezultatele. Ce observați?

PE Aplicare și exersare **

8. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 3\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3x + 1 < 10\}$.

a) Enumerați elementele mulțimilor A, B, C.

b) Calculați: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A - B$, $B - A$, $A - C$, $C - A$, $B - C$, $C - B$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$, $(A - B) \cup (B - A)$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A - B) \cap C$, $(A \cup B) - C$, $(A \cap B) - A$, $(A - C) \cap (C - A)$.

9. Fie $A = \{x \mid x = 5k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că A și B sunt mulțimi disjuncte.

10. Fie $A = \{x \mid x = 6k + 3, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 4p + 2, p \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $A \cap B = \varnothing$.

LIBRIS | Web knjige books

11. Fie $A = \{x \mid x = 14k + 12, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 21p + 17, p \in \mathbb{N}\}$. Verificați dacă A și B sunt disjuncte.

12. Fie $A = \{x \mid x = 4k + 3, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $A \cap B = \emptyset$.

13. Fie $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{20} + 1 \leq x \leq 2^{20} + 2^{10}\}$. Arătați că $A \cap B = \emptyset$.

14. Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $A \cap B = \{3, 5\}$; c) $A - B = \{1, 6\}$.

15. Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; b) $A \cap B = \{a, e\}$; c) $B - A = \{d, f\}$.

16. Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$; b) $A \cap B = \{2, 3, 5\}$;

c) $A \cup \{2, 5, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$; d) $B \cup \{0, 2, 4\} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

17. Într-o clasă sunt 29 de elevi. 19 elevi participă la cercul de informatică și 15 elevi participă la cercul de fizică. Fiecare elev participă la cel puțin una dintre aceste activități. Calculați câți elevi participă la ambele activități.

18. Fie $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 \leq 25\}$ și $B = \{x \mid x^3 \leq 27\}$. Aflați:

a) A și B; b) $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

19. Se dau mulțimile: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d\}$, $C = \{c, d, e\}$. Determinați mulțimile:

a) $(A - B) \cup C$; b) $(A - C) \cap B$;

c) $(B - C) \cup (A - \emptyset)$; d) $A \cup B \cup C$;

e) $A \cap B \cap C$; f) $(A \cap B) - C$.

PE Aprofundare și performanță ***

20. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^k, 1 < k \leq 4\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 3^{k-1}, 3 \leq k < 6\}$. Determinați mulțimile: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $(A - B) \cup (B \cap A)$, $(A \cup B) \cap (B - A)$, $A \Delta B$, unde $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ și se numește **diferența simetrică** dintre mulțimea A și mulțimea B.

21. Aflați câte numere naturale nenule mai mici decât 100 nu sunt divizibile nici cu 3, nici cu 7.

22. Determinați mulțimea A care verifică simultan condițiile:

a) $A \cap \{3, 5, 6\} = \{3, 5, 6\}$; b) $A \cup \{3, 5, 6\} = \{3, 5, 6\}$.

23. Fie mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ este cifră impară$\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 \leq 5\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x^2 + 1 \leq 19\}$.

a) Enumerați elementele mulțimilor A, B și C.

b) Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A - B$, $B - C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \Delta C$.

c) Indicați pe câte o diagramă fiecare dintre operațiile de la punctul b).

24. Determinați cardinalul mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2004} < x < 2^{2005}\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2^{2005}\}.$$

25. Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cap B = \{c, d\}$; b) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$;

c) mulțimile $A - B$ și $B - A$ au același număr de elemente.